ДИНАМИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ

ДИНАМИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ

ДИНАМИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ, раздел *оптимального управления*, посвящённый теории и методам решения многошаговых задач. В задачах оптимального управления среди возможных управлений ищется то, при котором достигается экстремальное (наименьшее или наибольшее) значение т. н. целевой функции – некоторой числовой характеристики процесса. В Д. п. под многошаговостью понимают либо многоступенчатую структуру процесса, либо то, что управление разбивается на ряд последовательных этапов (шагов), соответствующих, как правило, разл. моментам времени. Иногда многошаговость проистекает из существа процесса, но она может вводиться и искусственно для того, чтобы обеспечить возможность применения методов Д. п. Под программированием в Д. п. понимают принятие решений (планирование), а слово «динамическое» указывает на существенную роль времени и порядка выполнения операций. Методы Д. п. являются составной частью методов, используемых в *исследовании операций*, и применяются в задачах оптимального планирования (напр., в задачах об оптимальном распределении ресурсов, в теории управления запасами, в задачах замены оборудования) и при решении мн. технич. проблем (напр., в задачах управления последовательными химич. процессами, в задачах оптимальной прокладки дорог).

Пусть процесс управления некоторой системой X состоит из m шагов (этапов); на i-м шаге управление y_i переводит систему из состояния x_{i-1}, в котором она находилась после $(i-1)$-го шага, в новое состояние x_i. При этом задана функция $f_i(x, y)$, и новое состояние определяется по этой функции значениями x_{i-1}, y_i так, что $x_i=f_i(x_{i-1}, y_i)$, $i=1, 2, ..., m$. Т. о., управления $y_1, y_2, ..., y_m$ переводят систему из начального состояния $x_0\in X_0$ в конечное состояние $x_m\in X_m$, где X_0 и X_m – совокупности допустимых начальных и конечных состояний системы X.

Одна из возможных постановок задач Д. п. состоит в следующем. При заданном начальном состоянии x_0 требуется выбрать управления $y_1, y_2, ..., y_m$ таким образом, чтобы система X перешла в допустимое конечное состояние и при этом заданная целевая функция $F(x_0, y_1, x_1, ..., y_m, x_m)$ достигла макс. значения F^*, т. е. $F^*=\max F(x_0, y_1, x_1, ..., y_m, x_m)$, где максимум берётся по всем управлениям $y_1, ..., y_m$, для которых $x_m\in X_m$.

В Д. п. обычно предполагается, что целевая функция является аддитивной. В рассмотренном примере это означает, что $F=\sum_{i=1}^m\varphi_i(x_{i-1},y_i)$.

Кроме того, в Д. п. предполагается, что в задаче отсутствует последействие: решения (управления), принимаемые на шаге i, оказывают влияние только на состояние x_i системы в момент i. Оба упомянутых ограничит. условия можно ослабить, но только за счёт существенного усложнения метода.

В основе Д. п. лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. *Беллманом*. Пусть выбраны некоторые управления $y_1, y_2, ..., y_k$ и тем самым траектория $x_0, x_1, ..., x_k$ состояний и требуется завершить процесс, т. е. выбрать $y_{k+1}, ..., y_m$ (а значит, и $x_{k+1}, ..., x_m$). Если завершающая часть процесса не будет оптимальной в смысле достижения максимума функции $F_k=\sum_{i=k+1}^m\varphi_i(x_{i-1},y_i)$,

то и весь процесс не будет оптимальным. Пользуясь принципом оптимальности Беллмана, можно получить осн. функциональное соотношение Д. п., которое состоит в следующем. Пусть $\omega_m(x)=0$, $\omega_{k-1}(x)=\max(\varphi_k(x, y)+\omega_k(f_k(x, y)))$, $k=1, 2, ..., m$, где максимум берётся по всем управлениям y, допустимым на шаге k. Соотношение, определяющее зависимость ω_{k-1} от ω_k, называется уравнением Беллмана. Смысл этих функций достаточно ясен: если система на шаге $k-1$ оказалась в состоянии x, то $\omega_{k-1}(x)$ есть максимально возможное значение функции F_k. Одновременно с построением функций $\omega_{k-1}(x)$ находятся условные оптимальные управления $y_k(x)$ на каждом шаге, т. е. значения оптимального управления при всевозможных предположениях о состоянии x системы на шаге $k-1$. Окончательно оптимальные управления находятся последовательным вычислением величин $\omega_0(x_0)=F^*$, $y_1, x_1, y_2, ..., y_m, x_m$.

С помощью Д. п. решается не одна конкретная задача при определённом x_0, а сразу все подобные однотипные задачи при любом начальном состоянии. Численная реализация Д. п. довольно сложна, т. к. требует запоминания большого количества информации, поэтому Д. п. целесообразно применять в тех случаях, когда необходимо многократно решать типовые задачи (напр., определение оптимального режима полёта самолёта при меняющихся погодных условиях). Обычно задача Д. п. формулируется для дискретных процессов, но в ряде случаев Д. п. применяется и для решения динамич. задач с непрерывными параметрами.

Д. п. дало новый подход ко многим задачам *вариационного исчисления*. Важный раздел Д. п. составляют стохастич. задачи Д. п., т. е. задачи, в которых на состояние системы и на целевую функцию влияют случайные факторы.

Строгое обоснование Д. п. следует из результатов Л. С. *Понтрягина* и его учеников по математич. теории управляемых процессов.

Литература

Лит.: Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960; Математическая теория оптимальных процессов. М., 1961; Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. М., 1964; *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. М., 1967; Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М., 1969.