ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ

ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ четырёх точек

M_1,

M_2,

M_3,

M_4 на прямой, число, обозначаемое символом (

$M_1 M_2 M_3 M_4$) и равное

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2},$$

где

M_iM_j,

i,

$j = 1, 2, 3, 4$,

$i \neq j$, означает длину отрезка, соединяющего точки

M_i и

M_j. При этом учитываются направления отрезков; напр., отношение

$M_1 M_3 / M_3 M_2$ считается положительным, если направления отрезков

$M_1 M_3$ и

$M_3 M_2$ совпадают, и отрицательным в противном случае. Д. о. зависит от порядка нумерации точек, который может отличаться от порядка следования точек на прямой.

Наряду с Д. о. четырёх точек рассматривается Д. о. четырёх прямых

m_1, m_2, m_3, m_4, проходящих через общую точку

O. Это отношение обозначается символом (

$m_1 m_2 m_3 m_4$) и равно

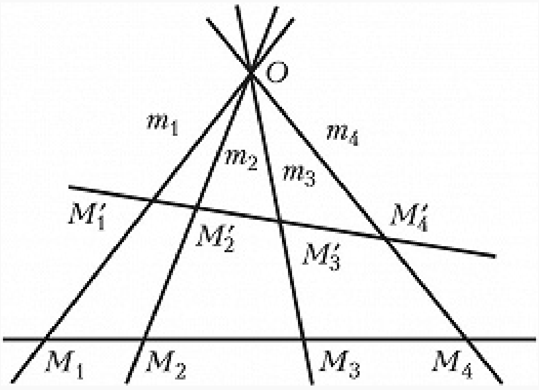

Рис. 1.

$$\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_3m_2)} : \frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_4m_2)},$$

причём углы (

m_im_j) между прямыми

m_i и

m_j,

i,

j = 1, 2, 3, 4,

$i \neq j$, рассматриваются со знаками.

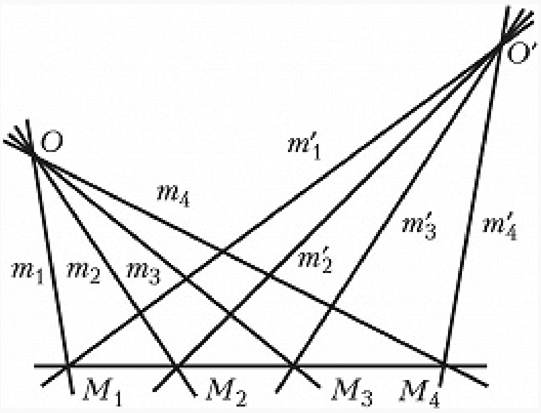

Рис. 2.

Если точки

M_1,

M_2,

M_3,

M_4 лежат на прямых

m_1,

m_2,

m_3,

m_4 (рис. 1), то

$(M_1M_2M_3M_4)=$

$(m_1m_2m_3m_4)$. Если точки

M_1,

M_2,

M_3,

M_4 и

M'_1,

M'_2,

M'_3,

M'_4 получены пересечением одной четвёрки прямых

m_1,

m_2,

m_3,

m_4 двумя разл. прямыми, то

$(M_1' M_2' M_3' M_4')=$

$(M_1 M_2 M_3 M_4)$. Если же прямые

m_1,

m_2,

m_3,

m_4 и

m_1',

m_2',

m_3',

m_4' проектируют одну четвёрку точек

M_1,

M_2,

M_3,

M_4 (рис. 2), то

$(m_1' m_2' m_3' m_4')=$

$(m_1 m_2 m_3 m_4)$. Д. о. не меняется при любом*проективном преобразовании*, т. е. является инвариантом этого преобразования, поэтому Д. о. важны в *проективной геометрии*. Особую роль играют четвёрки точек и прямых, для которых Д. о. равно –1. Такие четвёрки называются гармоническими.