



# ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС

Авторы: Б. А. Севастьянов

---

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС, общее название случайных процессов, описывающих широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением к.-л. объектов в другие (напр., частиц в физике, молекул в химии, особей в популяциях в биологии).

Осн. математич. предположением, выделяющим В. п. из всего класса [случайных процессов](#), является предположение независимости превращений объектов друг от друга. Простейший В. п. связан с задачей о вырождении фамилий. Фамилия передаётся от отца к сыну. Пусть имеется один прародитель – основатель фамилии. Далее эта фамилия переходит к его сыновьям, его внукам из семей сыновей и т. д.

Пусть

$Z(t)$  – число потомков прародителя по мужской линии в  $t$ -м поколении. Тогда число сыновей

$Z(1)$ , число внуков

$Z(2)$  по мужской линии составляют генеалогич. дерево потомков – носителей фамилии прародителя. Если в некотором поколении

$Z(t) = 0$ , то фамилия вырождается. Математич. моделью последовательности

$Z(t), t = 0, 1, 2, \dots$ , будет В. п., если предположить, что число сыновей каждого носителя фамилии из генеалогического дерева является случайной величиной, эти случайные величины независимы (см. [Независимость](#) в теории вероятностей) и имеют

одинаковые распределения вероятностей. Если среднее число сыновей одного отца

$A \leq 1$ , то вероятность

$q$  вырождения В. п. равна 1. Если

$A > 1$ , то вероятность

$q < 1$ . В этом случае с вероятностью

$1 - q > 0$  все

$Z(t) \geq 1, t = 1, 2, \dots$ . Другой пример В. п. связан с процессами размножения частиц

нескольких типов. Пусть

$Z_j(t), j = 1, 2, \dots, n$ , равно числу частиц

$j$ -го типа в момент времени

$t$ ; каждая частица

$j$ -го типа с некоторыми вероятностями превращается независимо от др. частиц в

совокупности частиц разных типов в последующие моменты времени. Время

$t$  можно понимать либо как номер поколения частиц (дискретное время), либо как

непрерывное время. Поведение при больших

$t$  средних

$A_j(t)$  чисел частиц

$Z_j(t)$  определяет характер эволюции В. п.

$(Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_n(t))$  с конечным числом типов частиц. Если при больших

$t$  все

$A_j(t) \rightarrow 0$ , В. п. называется докритическим и вероятность его вырождения

$q = 1$ ; если же некоторые

$A_j(t)$  растут как показательные функции, В. п. будет надкритическим и вероятность

его вырождения

$q < 1$ . В критич. В. п.

$A_j(t)$  может расти степенным образом, но вероятность вырождения

$q = 1$ .

Задача о вырождении фамилии рассматривалась в последней четв. 19 в. в работах англ. статистиков Ф. Гальтона и Дж. Н. [Ватсона](#). Определение В. п. с конечным числом типов частиц и сам термин «В. п.» впервые введены А. Н. [Колмогоровым](#) и Н. А. Дмитриевым (1947). С тех пор этот термин стал общепринятым. В многочисл. публикациях подробно изучены В. п., в которых размножение частиц зависит от некоторых параметров (напр., от возраста, размера или энергии), а также от их положения в пространстве и от момента времени размножения. В общей модели В. п. предполагается также, что частица может производить потомство неск. раз на протяжении своей жизни. В моделях В. п. в т. н. случайной среде частицы размножаются, хотя и независимо друг от друга, но при этом испытывают влияние общего для всех частиц состояния случайной среды. При исследованиях асимптотич.

поведения распределения вероятностей числа частиц

$Z(t)$  при больших

$t$  используются разнообразные математич. методы теории вероятностей и математич. статистики, а также методы теории дифференциальных уравнений, нелинейных интегральных уравнений и функционального анализа.

Разл. модели В. п. находят применение при расчётах реальных биологич., генетич., экологич., физич., химич. и технич. процессов. В реальных процессах часто нарушается условие независимости размножения разл. объектов; наоборот, размножение обычно связано с взаимодействием особей или частиц между собой. Так обстоит дело во мн. биологич. процессах размножения, в процессах распространения эпидемии, в цепных химич. реакциях и т. п. Однако начальные стадии развития таких процессов иногда можно рассчитывать с помощью соответственно подобранных моделей В. п. Это можно делать в тех случаях, когда в среде имеется не очень много активных частиц, которые при малых концентрациях почти не встречаются друг с другом, а изменения состояния системы происходят при встречах этих активных частиц с частицами среды. В процессах распространения эпидемии, напр., «активными частицами» можно считать больных индивидуумов. В генетике с помощью В. п. можно рассчитывать явления, связанные с мутациями. В. п. с конечным числом типов частиц может служить математич. моделью при расчётах цепных реакций; В. п. с диффузией частиц в ограниченной области – моделью процессов, протекающих в ядерных реакторах. Явления, возникающие в ливнях космич. лучей, также могут изучаться с помощью В. п. В телефонии расчёт некоторых систем с ожиданием также можно сводить к моделям ветвящегося процесса.

## Литература

Лит.: Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А. Ветвящиеся случайные процессы // Доклады АН СССР. 1947. Т. 56. № 1; Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., 1971; Athreya K. V., Ney P. E. Branching processes. В., 1972; Ватутин В. А., Зубков А. М. Ветвящиеся процессы // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. М., 1985. Т. 23; idem. Branching processes. II. Probability theory and mathematical statistics, 1 // Journal of Soviet Mathematics. 1993.

