ВЕЛИЧИНА

Авторы: А. Н. Колмогоров

ВЕЛИЧИНА, одно из осн. математич. понятий, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

В «Началах» Евклида были отчётливо сформулированы свойства В., называемые теперь (для отличия от дальнейших обобщений) положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие В. является непосредственным обобщением конкретных понятий, в частности длины, площади, объёма, массы и т. п. Каждый конкретный род В. связан с определённым способом сравнения соответствующих объектов. Напр., в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго. Для сравнения плоских фигур по площади или пространственных тел по объёму требуются более сложные приёмы. В пределах системы всех однородных В. (т. е. в пределах всех длин, или всех площадей, или всех объёмов) устанавливается отношение неравенства: две В. a и b одного и того же рода или совпадают ($a = b$), или первая меньше второй ($a < b$), или вторая меньше первой ($b < a$). Для каждого рода величин (длин, площадей, объёмов) определяется операция сложения. В пределах каждой из рассматриваемых систем однородных положительных скалярных В. отношение сравнения ($a < b$) и операция сложения ($a + b = c$) обладают следующими свойствами:

1) для любых

a и

b имеет место одно и только одно из трёх соотношений: или

$a = b$, или

$a < b$, или

$b < a$;

2) если

$a < b$ и

$b < c$, то

$a < c$ (транзитивность отношения);

3) для любых

a и

b существует однозначно определённая В.

$c = a + b$;

4) для любых

a и

b справедливо равенство

$a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

5) для любых

a, b, c справедливо равенство

$a +$ (

$b +$

c) = (

$a +$

b)

$+ c$ (ассоциативность сложения);

6) для любых

a и

b справедливо соотношение

a +

$b > a$ (монотонность сложения);

7) если

$a > b$, то существует одна и только одна В.

c, для которой

$b + c = a$ (возможность вычитания);

8) для любых

a и целого положительного числа

n существует такая В.

b, что

$nb = a$ (возможность деления);

9) для любых

a и

b существует целое положительное число

n такое, что

$a < nb$. Это свойство называется аксиомой Евдокса или аксиомой Архимеда.

Свойство 9) вместе с более элементарными свойствами 1) – 8) служит основой теории измерения В., развитой др.-греч. математиками.

В частности, если взять к.-л. длину

l за единичную, то система

Q всех длин вида

lp/q – где

p и q целые положительные числа, обладает свойствами 1) – 9). Существование несоизмеримых отрезков (открытие которых приписывается *Пифагору*) показывает, что система

Q ещё не охватывает системы

R всех возможных значений длин.

Чтобы получить вполне законченную теорию В., к требованиям 1) – 9) надо присоединить ту или иную дополнительную аксиому непрерывности, напр.:

10) если последовательности В.

$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ такие, что

$a_1 < a_2 << \ldots < b_2 < b_1$ и

$b_n - a_n < c$ для любой В.

c при достаточно большом номере

n, то существует единственная В.

x, которая больше всех

a_n и меньше всех

b_n.

Свойства 1) – 10) определяют совр. понятие системы положительных скалярных В. Если в такой системе выбрать к.-л. В.

l за единицу измерения, то все остальные В. системы однозначно представляются в виде

$a = \alpha l$, где

α – положительное действительное число.

Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, которые могут иметь два противоположных направления, и тому подобных В. приводит к обобщению понятия скалярной В., являющегося основным в математике, а также в механике и физике. Система скалярных В. в этом понимании включает в себя, кроме положительных В., нуль и отрицательные В. Выбирая в такой системе к.-л. положительную В.

l за единицу измерения, выражают все остальные В. системы в виде

$a = \alpha l$, где

α – действительное число (положительное, отрицательное или равное нулю).

В более общем смысле величинами называют векторы, тензоры и др. нескалярные величины. Такие В. можно складывать, но отношение

$a < b$ для них теряет смысл.

В некоторых математич. исследованиях используются т. н. неархимедовы В., которые имеют с обычными скалярными В. то общее, что для них сохраняются обычные свойства неравенств, но аксиома 9) не выполняется.

Система действительных положительных чисел удовлетворяет перечисленным выше свойствам 1) – 10), а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных В., поэтому вполне законно сами действительные числа назвать величинами.

См. также *Переменные и постоянные величины*.

Литература

Лит.: Лебег А. Об измерении величин. 2-е изд. М., 1960.