БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Авторы: С. А. Теляковский

БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ бесконечной последовательности чисел

$p_1, p_2, \ldots,$ формально записанное произведение

$$p_1 p_2 \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} p_k.$$

Если последовательность частичных произведений

$P_n = p_1 p_2 \ldots p_n$ при

$n \to \infty$ сходится к числу

P, не равному нулю, то Б. п. называют сходящимся,

P называют значением Б. п. и пишут

$P = \prod_{k=1}^{\infty} p_k$. Если последовательность

P_n не сходится к конечному пределу или сходится к нулю, то Б. п. называют расходящимся.

Сходимость Б. п., все множители

p_k которого положительны, равносильна сходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k$.

Для сходимости Б. п. необходимо, чтобы

$p_k \to 1$ при

$k \to \infty$, поэтому Б. п. часто записывают в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k).$$

Если все числа

a_k имеют одинаковые знаки, то сходимость такого Б. п. равносильна сходимости ряда

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Множителями Б. п. могут быть комплексные числа, функции и вообще элементы произвольной природы, для которых определены произведение конечного набора множителей и сходимость последовательностей элементов.

Б. п. используются для представления многих важных постоянных и функций. Напр., *Валлиса формула* даёт представление числа π в виде Б. п.; установленная Л. *Эйлером* формула

$$\sin x = \prod_{k=1}^{\infty} x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

хдаёт представление функции $\sin x$ в виде Б. п., которое можно рассматривать как аналог разложения многочлена на произведение многочленов первой и второй степеней.

Б. п. впервые встречаются в работе Ф. *Виета* (1593).

Литература

Лит.: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 8-е изд. М.; СПб., 2003. Т. 2; Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. 5-е изд. М., 2004. Ч. 1.