АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ К-ТЕОРИЯ

Авторы: И. А. Панин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ К-ТЕОРИЯ, изучает т. н. K-группы, $K_n(R), n = 0, 1, \ldots,$ определённые для любого кольца R.

Группа $K_0(R)$ введена франц. математиком А. Гротендиком (1957). Её образующими являются классы изоморфизма [P], [Q], ... конечно-порождённых модулей P, Q, ... над кольцом R (см. в статьях *Модуль*, *Гомологическая алгебра*). Порождающие соотношения группы $K_0(R)$ имеют вид $[P] + [Q] = [P \oplus Q]$. В случае, когда R – поле или кольцо многочленов над полем, группа $K_0(R)$ является кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$.

Группа $K_1(R)$, называемая группой Уайтхеда (введена амер. математиком Дж. Уайтхедом, 1950), совпадает с фактор-группой группы $GL(R)$ всех матриц с коэффициентами из R по подгруппе $E(R)$, порождённой элементарными матрицами, т. е. матрицами, отличающимися от единичной в одном единственном недиагональном члене. Если

R – поле, то

$K_1(R)$ совпадает с мультипликативной группой

R^* поля

R.

Группа

$K_2(R)$ введена Дж. *Милнором* (1971), она совпадает с группой всех нетривиальных соотношений между элементарными матрицами. Если

R – поле, то группа

$K_2(R)$ порождается символами

$\{a, b\}(a, b \in R^*)$, подчинёнными соотношениям

$$\{a_1, a_2, b\} = \{a_1, b\} + \{a_2, b\},$$

$$\{a, b_1, b_2\} = \{a, b_1\} + \{a, b_2\}$$

и

$\{a, 1 - a\} = 0$ для

a, не равных 0 и 1.

Группы

$K_n(R)$ для всех

$n \geqslant 0$ построены амер. математиком Д. Куилленом (1972). Ранее Милнор определил

$K_n(R)$ для полей, задав их символами

$\{a_1, \ldots, a_n\}, a_i \in R^*$, которые билинейны по каждому аргументу и

$\{a_1, . . . , a_n\} = 0$, если

$a_{i+} a_{i+1} = 0$ для некоторого

i. Группы Милнора не совпадают с группами Куиллена.

С помощью

K-групп решены многие трудные проблемы, не поддававшиеся решению с использованием др. методов. Введённая А. Гротендиком группа

$K_0(R)$ была им использована для доказательства и значит. обобщения теоремы Римана – Роха – Хирцебруха в *алгебраической геометрии*. Введённая Дж. Уайтхедом группа

$K_1(R)$ сыграла осн. роль в решении т. н. конгруэнц-проблемы: пусть

K – числовое поле (конечное расширение поля

$\mathbf{Q}$) и

$\mathbf{R}$ – его кольцо целых чисел (если

$K = \mathbf{Q}$, то

$R = \mathbf{Z}$); требуется установить, всякая ли подгруппа конечного индекса в

$SL_n(R)$ содержит группу всех матриц, сравнимых с единичной по модулю некоторого идеала

$I \subset R$. Проблема решается утвердительно для подполей

K поля вещественных чисел

$\mathbf{R}$.

K-группы Милнора поля можно связать с когомологиями группы Галуа его алгебраич. замыкания (теоремы Меркурьева – Суслина, Воеводского). В топологии с помощью K-групп решены проблемы об индексе эллиптич. оператора, о векторных полях на сфере и др. А. К-т. находит применения и в теории чисел (нахождение групп Галуа абелевых расширений локальных полей, вычисление значений дзета-функций в целых точках).

Литература

Лит.: Басс Х. Алгебраическая K-теория. М., 1973; Algebraic K-theory. B. e. a., 1973. Vol. 1–3; Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. М., 1974.