АЛГЕБРА

Авторы: А. Г. Курош, О. Ю. Шмидт, Д. К. Фаддеев

АЛГЕБРА [ср.-век. лат. algebra, от араб. аль-джебр, аль-джабр – воссоединение (отдельных частей уравнения)], раздел математики, принадлежащий, наряду с арифметикой и геометрией, к числу старейших ветвей этой науки; она изучает операции над математич. объектами и влияет на формирование общих понятий и методов математики. Задачи и методы А. заключались первоначально в составлении и решении уравнений. В связи с исследованиями уравнений развивалось понятие числа, были введены отрицательные, рациональные, иррациональные и комплексные числа; общее исследование свойств этих числовых систем относится к А. В алгебре сформировались буквенные обозначения, позволившие записать свойства действий над числами в форме, не содержащей конкретных чисел. Преобразования по определённым правилам (связанным со свойствами действий) буквенных выражений составляет аппарат классич. А. Развитие А. оказало большое влияние на развитие новых областей математики, в частности математич. анализа, дифференциального и интегрального исчисления. Применение А. возможно всюду, где приходится иметь дело с операциями, аналогичными сложению и умножению чисел. Эти операции могут производиться над объектами самой различной природы. Наиболее известным примером такого расширенного применения алгебраич. методов является векторная алгебра (см. *Линейная алгебра*) и её дальнейшее обобщение – тензорная алгебра (см. *Тензорное исчисление*), ставшая одним из важных средств совр. физики.

А. в более широком, совр. понимании может быть определена как наука о системах объектов той или иной природы, в которых установлены операции, называемые алгебраическими, по своим свойствам сходные со сложением и умножением чисел. А. классифицирует системы с заданными на них алгебраич. операциями по их свойствам и изучает разл. задачи, естественно возникающие в этих системах, включая и задачу решения и исследования уравнений, которая в новых системах объектов получает новый смысл (решением уравнений может быть вектор, матрица, оператор). Этот новый взгляд на А., оформившийся лишь в 20 в., способствовал дальнейшему расширению области применения алгебраических методов не только в математике, но и в других науках, в частности в физике. Он укрепил связи А. с другими разделами математики и усилил влияние А. на их дальнейшее развитие.

Исторический очерк

А. предшествовала арифметика, операциями которой были сложение, вычитание, умножение и деление чисел, сначала только целых, а затем и дробных. Вначале отличие А. от арифметики заключалось в том, что в А. вводилась неизвестная величина, действия над которой, диктуемые условиями задачи, приводили к уравнению, из которого находилась эта неизвестная величина. Элемент такой трактовки арифметич. задач содержится в др.-егип. папирусе Ахмеса (см. в ст. *Папирусы математические*), где искомая величина обозначается соответствующим иероглифом. Древние египтяне решали и достаточно сложные задачи (связанные, напр., с арифметич. и геометрич. прогрессиями). Как формулировка задач, так и решения давались в словесной форме и только в виде конкретных численных примеров.

В нач. 20 в. были расшифрованы *клинописные математические тексты* и другой древнейшей культуры – вавилонской. Вавилоняне уже за 4000 лет до наших дней с помощью спец. таблиц умели решать разнообразные задачи; некоторые из них равносильны решению квадратных уравнений и даже одного вида уравнений 3-й степени.

Логич. доказательства в математику впервые ввели др.-греч. геометры. В рамках геометрич. метода мн. математич. вопросы переводились на язык геометрии: величины трактовались как длины, произведение двух величин – как площадь прямоугольника и т. д. В совр. математич. языке сохранилось, напр., назв. «квадрат» для произведения величины на самоё себя. К другой, негеометрич. линии развития др.-греч. математики относится трактат *Диофанта* «Арифметика», в котором он довольно свободно оперирует с уравнениями 1-й, 2-й и более высоких степеней. В этом трактате можно найти попытки употребления буквенной символики и отрицательных чисел. На конкретных примерах предвосхищаются методы решения в рациональных числах уравнений 3-й степени с двумя неизвестными.

Достижения др.-греч. науки развивались учёными ср.-век. Востока, в т. ч. аль-*Хорезми* и *Бируни*. Учёные Востока передали Европе известную им математику в своей оригинальной переработке, причём особенно много они занимались именно А. Термин «А.» происходит от названия сочинения аль-Хорезми «Аль-джебр аль-мукаба-ла», означающего один из приёмов преобразования уравнений. Со времени аль-Хорезми А. можно рассматривать как отд. раздел математики.

Математики ср.-век. Востока все действия излагали словами. Дальнейший прогресс А. стал возможным только после появления удобных символов для обозначения действий (см. *Математические знаки*). Этот процесс шёл очень медленно, и только в конце 15 в. появились принятые теперь знаки + и –. Затем были введены и получили всеобщее признание знаки, обозначающие степень, корень, а также скобки. К сер. 17 в. полностью сложился аппарат символов совр. А. – употребление букв для обозначения не только искомого неизвестного, но и всех вообще входящих в задачу величин. До этого в А. и арифметике как бы не было общих

правил и доказательств; рассматривались исключительно численные примеры, почти невозможно было высказать к.-л. общие суждения. Даже элементарные учебники того времени давали десятки частных правил вместо одного общего. Ф. Виет (1591) первым начал писать задачи в общем виде, обозначая неизвестные величины гласными
$A, E, I, \ldots,$ а известные – согласными
$B, C, D, \ldots.$ Эти буквы он соединял имевшимися в то время знаками математич. операций, т. о. впервые возникли буквенные формулы, характерные для совр. А. Начиная с Р. Декарта для неизвестных употребляют, как правило, последние буквы лат. алфавита
$x, y, z.$

Введение символич. обозначений и операций над буквами, заменяющими конкретные числа, имело исключительно важное значение. Без этого языка формул было бы немыслимо бурное развитие математики начиная с 17 в., создание математич. анализа, математич. выражения законов механики и физики и пр.

Исторически первой задачей А. было решение алгебраич. уравнений, т. е. нахождение их корней. Важную роль в решении уравнений сыграло появление отрицательных чисел. Они были введены инд. математиками в 10 в., но учё- ные ср.-век. Востока их не использовали. С отрицательными числами свыкались постепенно; этому способствовали коммерч. вычисления, в которых отрицательные числа имеют наглядный смысл, напр. убытка, недостатка, долга. Окончательно отрицательные числа вошли в употребление только в 17 в., после того как Р. Декарт предложил их наглядное геометрич. представление.

При решении алгебраических уравнений возникла потребность расширения числовой области. Так, при решении уравнений 2-й степени появляются иррациональные числа (см. также Алгебраическое число). С извлечением корней сталкивались ещё др.-греч. и ср.-азиат. математики, которые предложили остроумные способы их приближённого вычисления. Взгляд на иррациональность как на число установился значительно позже. Введение комплексных чисел относится к 18 в.

Любое уравнение
n-й степени имеет
n корней, вообще говоря комплексных, причём это верно и для уравнений с комплексными коэффициентами. Эта важная теорема, носящая название основной теоремы А., была впервые сформулирована в 17 в., её доказательство было дано в кон. 18 в. К. Гауссом. Все известные доказательства должны были в той или иной форме использовать непрерывность; т. о., доказательство основной теоремы А. выходило за пределы А., демонстрируя неразрывность математики в целом.

Многие теоретич. и практич. вопросы приводят не к одному уравнению, а к системам уравнений с неск. неизвестными. Особенно важен случай систем линейных уравнений. К этим простейшим системам сводятся системы уравнений, встречающихся на практике. Решение систем линейных уравнений составляет существенную часть при численном решении разнообразных прикладных задач. Г. *Лейбниц* (1693) обратил внимание на то, что при изучении систем линейных уравнений важную роль играет *матрица*, составленная из их коэффициентов. Впоследствии матрицы стали предметом самостоят. изучения в А., т. к. их роль не исчерпывается приложениями к теории систем линейных уравнений.

Появление *аналитической геометрии* тесно связано с А. Если у древних греков чисто алгебраич. задачи облекались в геометрич. форму, то теперь алгебраич. средства выражения оказались настолько удобными и наглядными, что геометрич. задачи переводились на язык алгебраич. формул.

В кон. 17 – нач. 18 вв. был создан и быстро распространился анализ бесконечно малых, сыгравший важнейшую роль в развитии математики и её приложений, что во многом было подготовлено развитием А. В частности, буквенные выражения и действия над ними способствовали зарождению ещё в 16–17 вв. взгляда на математич. величины как на переменные, что характерно для анализа бесконечно малых, где непрерывному изменению одной величины обычно соответствует непрерывное изменение другой (функции от этой переменной).

А. и математич. анализ развивались в 17–18 вв. в тесной связи. В А. проникали понятия и методы анализа, в этом направлении её обогатил И. *Ньютон*. С др. стороны, А. дала анализу развитый набор формул и преобразований, сыгравших большую роль в начальный период развития интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Крупным событием в А. этого периода было появление учебника Л. *Эйлера*. Отличие А. от анализа в 18–19 вв. характеризуется тем, что А. имеет своим осн. предметом дискретное, конечное. Осн. операции, напр. сложение, производятся в А. конечное число раз. Эту особенность А. подчеркнул в 1-й пол. 19 в. Н. И. *Лобачевский*, назвав одну из своих книг «Алгебра, или Вычисление конечных» (1834).

К 18 в. А. сложилась примерно в том объёме, который до наших дней преподаётся в средней школе. Эта А. охватывает действия сложения, умножения с обратными им действиями вычитания и деления, а также возведение в степень и обратное ему извлечение корня. Эти действия проводятся над числами или буквами, которые могут обозначать положительные или отрицательные, рациональные или иррациональные числа. На рус. языке изложение элементарной А. в виде, сложившемся к нач. 18 в., было впервые дано в «Арифметике…» Л. Ф. *Магницкого*.

А. 18–19 вв. есть прежде всего А. многочленов. Предмет А., таким образом, оказывается значительно уже, чем предмет анализа. Вместе с тем А. и математич. анализ продолжают иметь много точек соприкосновения, и разграничение между ними не является жёстким. Во многих случаях изучение многочленов как довольно простых функций помогало развитию общей теории функций. Через всю историю математики проходит тенденция сведения изучения более сложных функций к изучению многочленов или рядов. С др. стороны, А. начинает всё больше пользоваться идеями непрерывности и бесконечности, характерными для математич. анализа.

Современное состояние алгебры

Для совр. А. характерно то, что в центре внимания оказываются свойства операций, а не объектов, над которыми производятся эти операции. Простой пример даёт возможность проследить, как это происходит. Известна формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Её выводом является цепочка равенств:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)= =(a+b)a+(a+b)b=(a^2+ba)+(ab+b^2)= =a^2+(ba+ab)+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

Здесь дважды использован закон дистрибутивности, закон ассоциативности при сложении позволяет перегруппировать слагаемые, наконец, используется закон коммутативности $ba=ab$. Что представляют собой объекты, обозначенные буквами a и b, не имеет значения; важно, чтобы они принадлежали множеству, в котором определены две операции, сложение и умножение, удовлетворяющие перечисленным требованиям, касающимся свойств операций, а не объектов. Формула останется верной, если a и b означают векторы, в этом случае сложение в левой части – это сложение векторов, а в правой части формулы – сложение чисел; под умножением понимается скалярное умножение векторов. В этой формуле вместо a и b можно подставить также коммутирующие матрицы (т. е. такие, что $ab=ba$, что для матриц может не выполняться), операторы дифференцирования по двум независимым переменным и др.

Отвлекаясь от природы объектов, но фиксируя определённые свойства операций над ними, приходят к понятию множества, наделённого алгебраич. операциями (см. *Универсальная алгебра*). В ходе развития математики и её приложений первоначально выделились сравнительно немногие типы алгебраич. структур: группы, *поля*, *векторные пространства*, ассоциативные кольца и алгебры, *модули*. В дальнейшем предметом изучения стали также др.

классы: неассоциативные кольца и алгебры (в т. ч. алгебры Ли, йордановы алгебры), решётки, полугруппы и др. (см. *Групп теория*, *Колец теория*, *Ли алгебр теория*, *Решёток теория*). Большим разделом А., имеющим многочисл. приложения, как в самой математике, так и в естествознании, является теория представлений групп. А. имеет тесные связи и с математич. логикой (см. *Булева алгебра*, *Моделей теория*).

Развиваются также разделы А., изучающие алгебраич. операции в множествах, снабжённых дополнительными структурами. Таким образом возникли топологическая алгебра, теория групп Ли (т. е. групп, являющихся гладкими многообразиями), теории разл. упорядоченных систем. Теория полей, возникшая из алгебраич. теории чисел, и изучение коммутативных колец относятся к *коммутативной алгебре*, которая служит основой *алгебраической геометрии*. Под влиянием топологии появился новый раздел А. – *гомологическая алгебра*, которая, в свою очередь, привела к возникновению *категорий теории*, давшей новый универсальный язык для описания понятий не только А., но и практически всех областей математики.

Наряду с фундам. ролью внутри математики, А. имеет большое прикладное значение: она применяется в физике (симплектич. формы в механике, представления групп Ли в квантовой теории, супералгебры Ли в теории поля, фёдоровские группы в кристаллографии), в дискретной математике (теория автоматов, алгебраич. теория кодирования), в математич. экономике (линейные неравенства) и др.

Литература

Лит.: Бурбаки Н. Алгебра. М., 1962–1966. Гл. 1–9;Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. 2-е изд. М., 1965; Ленг С. Алгебра. М., 1968; История математики: В 3 т. М., 1970–1972; Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., 1975; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. М., 1978; Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М., 1979; Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Алгебра–1. М., 1986. Т. 11; Кострикин А. И. Введение в алгебру: В 3 ч. М., 2001; Винберг Э. Б. Курс алгебры. 3-е изд. М., 2002.